

*Journées*

# **ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES**

Évian-les-Bains, 5 juin–9 juin 2006

Sylvain Golénia

Un nouveau regard sur l'estimation de Mourre

*J. É. D. P.* (2006), Exposé n° V, 12 p.

<[http://jedp.cedram.org/item?id=JEDP\\_2006\\_\\_\\_\\_A5\\_0](http://jedp.cedram.org/item?id=JEDP_2006____A5_0)>

cedram

*Article mis en ligne dans le cadre du  
Centre de diffusion des revues académiques de mathématiques  
<http://www.cedram.org/>*

# Un nouveau regard sur l'estimation de Mourre

Sylvain Golénia

## Résumé

La théorie de Mourre est un outil puissant pour étudier le spectre continu d'opérateurs auto-adjoints et pour développer une théorie de la diffusion. Dans cet exposé nous proposons d'un nouveau regard sur la théorie de Mourre en donnant une nouvelle approche du résultat principal de la théorie : le principe d'absorption limite (PAL) obtenu à partir de l'estimation de Mourre. Nous donnons alors une nouvelle interprétation de ce résultat. Cet exposé a aussi pour but d'être une introduction à la théorie.

## 1. Introduction

Nous allons présenter dans cet exposé des résultats obtenus en collaboration avec Thierry Jecko dans [GJ].

Dans le début des années 80, Eric Mourre développe dans [M] un outil puissant basé sur des techniques de commutateurs pour montrer le caractère purement absolument continu du spectre d'opérateurs de Schrödinger à  $N$ -corps et pour étudier leur théorie de la diffusion (cf. [ABG, HuS]). En particulier, dans le problème de la complétude asymptotique, l'estimation de Mourre (cf. (1.1)) joue un rôle crucial (cf. [DG, HuS]). Aujourd'hui, l'estimation de Mourre est un outil fondamental pour dans la théorie de la diffusion stationnaire d'opérateurs auto-adjoints, voir [ABG, DG]. Elle est encore utilisée dans divers contextes (cf. [BCHM, CGH, DJ, GGo] par exemple) et de nouveaux développements apparaissent pour traiter des difficultés particulières en théorie de champs (cf. [GGM1, GGM2]).

La théorie est basée sur l'utilisation de deux outils, d'un côté le théorème du Viriel avec des conséquences sur l'étude des valeurs propres plongées dans le spectre continu, voir Section 2.2, et d'un autre côté une technique *d'inégalité différentielle* avec pour conséquence des estimations de résolvantes. Cette dernière technique reste cependant assez magique et mystérieuse. Dans cet exposé, nous proposons une nouvelle approche et interprétation de ce dernier point. Nous proposons une méthode alternative basée sur l'utilisation d'un théorème du Viriel adapté au problème. Celle-ci est une adaptation d'une stratégie utilisée pour obtenir des estimations de résolvantes pour des opérateurs de Schrödinger dans un régime semi-classique. Elle a

---

*MSC 2000* : 58J40, 58Z05.

*Mots-clés* : Mourre's commutator theory, Mourre estimate, limiting absorption principle, continuous spectrum.

été introduite par T. Jecko dans [J1] (voir aussi [B]) et utilisée par la suite dans [CJ, J2].

On considère deux opérateurs (non-bornés) auto-adjoints  $H$  et  $A$  agissant dans un Hilbert complexe  $\mathcal{H}$ . Cet Hilbert est muni d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ , anti-linéaire par rapport à la première variable, et sa norme associée est notée par  $\| \cdot \|$ . Nous allons étudier l'opérateur  $H$  grâce à l'opérateur *conjugué*  $A$ . Les commutateurs  $[\dots[H, A], A]\dots, A]$  jouent un rôle centrale dans la théorie. Nous dirons que  $H \in \mathcal{C}^k(A)$  si le  $k$ -ème commutateur de  $H$  avec  $A$  est bien défini et vérifie certaines propriétés, voir Section 2.1 et Lemme 2.4.

Soit  $H \in \mathcal{C}^1(A)$  et  $\mathcal{I}$  un intervalle borné de  $\mathbb{R}$ . On dira que *l'estimation de Mourre* est vraie pour  $H$  au dessus de  $\mathcal{I}$  si il existe  $c > 0$  et un opérateur compact  $K$  tels que

$$E_{\mathcal{I}}(H)[H, iA]E_{\mathcal{I}}(H) \geq cE_{\mathcal{I}}(H) + K, \quad (1.1)$$

soit vérifié dans le sens des formes sur  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  et où la mesure spectrale de  $H$  au dessus de  $\mathcal{I}$  est notée par  $E_{\mathcal{I}}(H)$ . Heuristiquement,  $c$  est relié à des propriétés de diffusions de l'opérateur  $H$  et  $K$  à la présence de valeurs propres, au dessus de  $\mathcal{I}$ .

L'estimation de Mourre permet de donner des informations sur les valeurs propres, voir section 2.2. Par exemple, on montre que les valeurs propres de  $H$ , au dessus de  $\mathcal{I}$ , ne peuvent pas s'accumuler et sont de multiplicité finie. En se plaçant dans un plus petit interval ne contenant pas de valeurs propres, on peut se ramener à une estimation de Mourre *stricte*, où  $K = 0$  (voir Proposition 3.1). Un but de la théorie est alors de montrer l'estimation de résolvante suivante.

**Définition 1.1.** Le *principe d'aborsorption limite* (PAL) pour  $H$  est valide par rapport au triplet  $(\mathcal{I}, s, A)$ , avec  $\mathcal{I}$  un interval,  $s \geq 0$ , si

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{I}, \varepsilon > 0} \|\langle A \rangle^{-s} (H - \lambda - i\varepsilon)^{-1} \langle A \rangle^{-s}\| < \infty. \quad (1.2)$$

Nous discutons de diverses conséquences de ce résultat dans la Section 3.1. Nous montrons le

**Théorème 1.2.** *Soient  $H \in \mathcal{C}^2(A)$ ,  $\mathcal{I}$  un intervalle ouvert et  $s > 1/2$ . Supposons vraie l'estimation de Mourre stricte suivante :*

$$E_{\mathcal{I}}(H)[H, iA]E_{\mathcal{I}}(H) \geq cE_{\mathcal{I}}(H), \quad (1.3)$$

où  $c > 0$ . Alors pour tout intervalle compact  $\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}$ , nous avons

$$\sup_{\lambda \in \mathcal{I}', \varepsilon > 0} \|\langle A \rangle^{-s} (H - \lambda - i\varepsilon)^{-1} \langle A \rangle^{-s}\| < \infty.$$

A l'hypothèse  $\mathcal{C}^2(A)$  près, ce théorème est dû à Eric Mourre. La preuve originelle et les améliorations de celle-ci (voir [ABG]) sont basées sur une technique d'inégalité différentielle. Cette preuve n'est pas totalement intuitive cependant et il est alors intéressant de pouvoir donner un preuve alternative de ce phénomène dans le but de le rendre plus compréhensible. C'est le sens de notre démarche.

Nous saisissons l'opportunité pour donner une vue générale de la théorie en rappelant la régularité des opérateurs, section 2.1, le théorème du Viriel et ses conséquences, section 2.2 et quelques conséquence du PAL, section 3.1. Nous donnons aussi un exemple pratique, section 5.

Les outils de notre approches sont développés en section 3.3 et la nouvelle preuve est esquissée en section 4.

## 2. L'estimation et la théorie de Mourre

### 2.1. Régularité d'opérateurs

Dans cette section, nous rappelons le concept de régularité d'ordre  $k$  d'un opérateur par rapport à un autre, voir [ABG, section 6] pour plus de détails. Cela a pour but de donner un sens précis aux commutateurs de la théorie.

Soit  $A$  un opérateur auto-adjoint sur un Hilbert  $\mathcal{H}$ . Pour  $T$  opérateur borné, on dit que  $T \in \mathcal{C}^k(A)$  si  $t \mapsto e^{itA} T e^{-itA} f$  est  $\mathcal{C}^k$  pour tout  $f \in \mathcal{H}$ . Si  $T$  est aussi auto-adjoint, cela est équivalent avec le fait que  $(T - z)^{-1} \in \mathcal{C}^1(A)$  pour un  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  (et donc pour tous). D'une façon générale, nous dirons que

**Définition 2.1.** Un opérateur  $H$  auto-adjoint est  $\mathcal{C}^k(A)$  si  $t \mapsto e^{itA} (H - z)^{-1} e^{-itA} f$  pour un  $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$  (et donc pour tous) est  $\mathcal{C}^k$  pour tout  $f \in \mathcal{H}$ .

Cette classe de régularité nous permet de bien définir les commutateurs d'ordre  $k$  de  $H$  avec  $A$ . Regardons d'abord le cas  $k = 1$ .

**Théorème 2.2** ([ABG]). *Soient  $A$  et  $H$  deux opérateurs auto-adjoints sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Les points suivants sont équivalents :*

1.  $H \in \mathcal{C}^1(A)$ .

2. Pour un  $z \notin \sigma(H)$  (et donc pour tous), il existe  $c$  tel que

$$|\langle Af, (H - z)^{-1} f \rangle - \langle (H - \bar{z})^{-1} f, Af \rangle| \leq c \|f\|^2, \quad \forall f \in \mathcal{D}(A).$$

3. a. Il existe  $c$  tel que pour tout  $f \in \mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(H)$  :

$$|\langle Af, Hf \rangle - \langle Hf, Af \rangle| \leq c (\|Hf\|^2 + \|f\|^2), \quad (2.4)$$

b. pour un  $z \notin \sigma(H)$  (et donc pour tous), l'ensemble  $\{f \in \mathcal{D}(A) \mid R(z)f \in \mathcal{D}(A) \text{ and } R(\bar{z})f \in \mathcal{D}(A)\}$  est un cœur pour  $A$ .

Si cette propriété est vérifiée alors nous avons que

$$[A, (H - z)^{-1}] = (H - z)^{-1} [H, A] (H - z)^{-1}, \quad (2.5)$$

pour  $z \notin \sigma(H)$ .

Le point (3.b.) nous permet de dire que  $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(H)$  est un cœur pour  $H$  (sans lui, la fermeture de  $\mathcal{D}(A) \cap \mathcal{D}(H)$  dans  $\mathcal{D}(H)$ , muni de la norme du graphe de  $H$ , peut être strictement plus petite que  $\mathcal{D}(H)$ ). Le point (3.a.) nous donne alors que le commutateur  $[H, A]$  définit bien un opérateur appartenant à  $\mathcal{B}(\mathcal{D}(H), \mathcal{D}(H)^*)$ . Concernant le point (2.5), il est à noter que dans le membre de droite est la composition des trois opérateurs :  $(H - z)^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{D}(H)$ ,  $[H, A] : \mathcal{D}(H) \rightarrow \mathcal{D}(H)^*$  et  $(H - z)^{-1} : \mathcal{D}(H)^* \rightarrow \mathcal{H}$  (de droite à gauche).

*Remarque 2.3.* Notons que  $\mathcal{D}(H)$  est équipé de la norme du graphe de  $H$  et est donc un espace de Hilbert. Il s'injecte densément dans  $\mathcal{H}$ . En identifiant  $\mathcal{H}$  avec son anti-dual  $\mathcal{H}^*$  par l'isomorphisme de Riesz, nous avons  $\mathcal{D}(H) \hookrightarrow \mathcal{H} \simeq \mathcal{H}^* \hookrightarrow \mathcal{D}(H)^*$ . De cette façon, nous avons une identification des formes agissant sur  $\mathcal{D}(H) \times \mathcal{D}(H)$  avec  $\mathcal{B}(\mathcal{D}(H), \mathcal{D}(H)^*)$ .

Pour résumer, si  $H \in \mathcal{C}^1(A)$  alors le commutateur  $[H, A]$ , défini comme forme (sesquilinéaire) sur  $\mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A) \times \mathcal{D}(H) \cap \mathcal{D}(A)$  s'étend en un opérateur de  $\mathcal{B}(\mathcal{D}(H), \mathcal{D}(H)^*)$  et alors l'estimation de Mourre (1.1) a un sens. La propriété  $\mathcal{C}^1(A)$

reste cependant subtile et le fait que le commutateur s'étende en un opérateur de  $\mathcal{B}(\mathcal{D}(H), \mathcal{D}(H)^*)$  n'est pas suffisant pour appliquer la théorie, voir [GGé]. Nous avons le critère suivant.

**Lemme 2.4.** *On suppose  $e^{itA}\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(H)$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Si  $[H, A]$ , défini au sens des formes par (2.4), s'étend en un opérateur de  $\mathcal{B}(\mathcal{D}(H), \mathcal{H})$  alors  $H$  est  $\mathcal{C}^1(A)$ .*

L'intérêt de ce lemme est de donner une classe d'opérateurs de  $\mathcal{C}^k(A)$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . En effet, si  $[H, A]$  est  $\mathcal{C}^k(A)$  alors  $H$  est  $\mathcal{C}^{k+1}(A)$ . Cette façon de procéder est la plus utilisée car la plus simple mais est loin d'être la plus fine. Dans beaucoup de cas pratiques,  $e^{itA}$  est explicite et il est facile de vérifier l'hypothèse d'invariance du domaine. Dans les autres cas, on peut vérifier cette hypothèse avec le résultat de [GGé] :

**Lemme 2.5.** *Si  $H \in \mathcal{C}^1(A)$  et si  $[H, A]$ , défini au sens des formes par 2.4, s'étend en un opérateur de  $\mathcal{B}(\mathcal{D}(H), \mathcal{H})$  alors  $e^{itA}\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(H)$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .*

## 2.2. Le théorème du Viriel et ses conséquences

Dans cette section nous rappelons le théorème du Viriel et ses conséquences directes. Pour plus de discussions à ce sujet voir [GGé].

**Proposition 2.6** (Théorème du Viriel). *Soit  $H \in \mathcal{C}^1(A)$  et soit  $f$  un vecteur propre de  $H$  alors  $[H, A]$  s'étend en un élément de  $\mathcal{B}(\mathcal{D}(H), \mathcal{D}(H)^*)$  et  $\langle f, [H, A]f \rangle = 0$ .*

Soit  $\lambda$  la valeur propre associée à  $f$ . Notons que ce lemme est formellement vrai si on écrit que le commutateur vaut  $[H - \lambda, A]$  et que l'on développe le commutateur. Le problème est que  $f \notin \mathcal{D}(A)$  et donc cette démarche reste formelle. Nous répétons la preuve de [ABG].

*Démonstration.* Soit  $A_\tau := (i\tau)^{-1}(e^{itA} - I)$  pour  $\tau \neq 0$ . Nous avons que  $\lim_{\tau \rightarrow 0} [A_\tau, (H - z)^{-1}] = [A, (H - z)^{-1}]$  fortement, pour  $z \notin \sigma(H)$ . On a  $f = (\lambda - i)(H - i)^{-1}f$ . On utilise alors (2.5) et on a :

$$\begin{aligned} \langle f, [H, A]f \rangle &= -(\lambda + i)^2 \langle f, [(H + i)^{-1}, A]f \rangle \\ &= -(\lambda + i)^2 \lim_{\tau \rightarrow 0} (\langle f, A_\tau (H + i)^{-1}f \rangle - \langle (H + i)^{-1}f, A_\tau f \rangle). \end{aligned}$$

Pour  $\tau \neq 0$ , le dernier terme est 0. □

**Proposition 2.7.** *On Suppose  $H \in \mathcal{C}^1(A)$  et l'estimation de Mourre stricte (1.3) vérifiée. Alors,  $H$  n'a pas de valeurs propres dans  $\mathcal{I}$ .*

*Démonstration.* Soit  $f$  tel que  $Hf = \lambda f$  avec  $\lambda \in \mathcal{I}$ . On applique (1.3) à  $f$  et on obtient  $\langle f, [H, iA]f \rangle \geq c\|f\|^2$ . Par la Proposition 2.6 et comme  $c > 0$ , on obtient que  $f = 0$ . □

**Proposition 2.8.** *On Suppose  $H \in \mathcal{C}^1(A)$  et que l'estimation de Mourre (1.1) est vérifiée sur  $\mathcal{I}$ . Alors, les valeurs propres de  $H$ , dans  $\mathcal{I}$ , sont de multiplicité finie et elles ne peuvent pas s'accumuler.*

*Démonstration.* Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions propres orthonormalisées de  $H$  d'énergie inclus dans  $\mathcal{I}$ . On applique (1.1) à  $f_n : \langle f_n, [H, iA]f_n \rangle \geq c\|f_n\|^2 + \langle f_n, Kf_n \rangle$  et donc par la Proposition 2.6, on a  $0 \geq c + \langle f_n, Kf_n \rangle$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Maintenant comme  $f_n$  tend faiblement vers 0,  $Kf_n$  tend fortement vers 0 et donc  $\langle f_n, Kf_n \rangle$  tend vers 0. Contradiction.  $\square$

### 3. Le principe d'absorption limite

#### 3.1. Quelques conséquences

Plaçons-nous dans le contexte de la Définition 1.1. Remarquons tout d'abord que le PAL pour  $H$  est valide par rapport à  $(\mathcal{I}, 0, A)$  si et seulement si  $\mathcal{I}$  n'est pas inclus dans le spectre de  $H$ . Ensuite, étant donnés  $s' > s \geq 0$ , notons que si un PAL est vrai pour un triplet  $(\mathcal{I}, s, A)$  alors il l'est aussi pour le triplet  $(\mathcal{I}, s', A)$ .

Une conséquence immédiate du PAL pour un opérateur  $H$ , par rapport à un triplet  $(\mathcal{I}, s, A)$  avec  $s \geq 0$ , est que le spectre de  $H$  est purement absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue. En particulier, au dessus de  $\mathcal{I}$ ,  $H$  n'a pas de valeurs propres et la mesure spectrale de  $H$  ne possède pas de spectre singulier continu par rapport à la mesure de Lebesgue.

Une conséquence plus intéressante du PAL est l'estimation de propagation suivante (cf. Kato's local smoothness dans [ABG, RS4]). Il existe  $C > 0$  tel que pour tout  $f \in \mathcal{H}$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \|\langle A \rangle^{-s} e^{itH} E_{\mathcal{I}}(H)f\|^2 dt \leq C\|f\|^2. \quad (3.6)$$

Pour  $E_{\mathcal{I}}(H)f \neq 0$ , l'état  $e^{itH} E_{\mathcal{I}}(H)f$ , solution de l'équation de Schrödinger associée à l'opérateur  $H$ , se dirige vers une région où “ $|A|$  est grand” quand  $t \rightarrow -\infty$  et  $t \rightarrow +\infty$ , puisque l'intégrale converge. Si  $Hf = \lambda f$  avec  $\lambda \in \mathcal{I}$  et  $f \neq 0$ , alors  $e^{itH} E_{\mathcal{I}}(H)f = e^{it\lambda} f$ ,  $\|\langle A \rangle^{-s} e^{itH} E_{\mathcal{I}}(H)f\| = \|\langle A \rangle^{-s} f\|$ , et l'intégrale (3.6) diverge. En particulier, le PAL ne peut pas être vrai près d'une valeur propre.

#### 3.2. La théorie de Mourre et le principe d'absorption limite

Comme nous venons de voir, le PAL entraîne en particulier une absence de valeur propre. Au vu des Propositions 2.7 et 2.8, il faut pouvoir passer d'une estimation de Mourre (1.1) à une estimation de Mourre stricte (1.3) pour éviter les valeurs propres.

**Proposition 3.1.** *Supposons que  $H \in \mathcal{C}^1(A)$  et que l'estimation de Mourre (1.1) est vérifiée sur  $\mathcal{I}$  avec  $c > 0$  et  $K$  compact. Soit  $\lambda \in \mathcal{I}$  qui n'est pas une valeur propre de  $H$ . Alors il existe un voisinage  $\mathcal{I}'$  de  $\lambda$  dans  $\mathcal{I}$  tel que l'estimation de Mourre stricte (1.3) soit vérifiée avec  $c/2$  au lieu de  $c$ .*

*Démonstration.* Soit  $\mathcal{I}_n = \mathcal{I} \cap [\lambda - 1/n, \lambda + 1/n]$ . On applique l'estimation de Mourre :

$$E_{\mathcal{I}_n}(H)[H, iA]E_{\mathcal{I}_n}(H) \geq cE_{\mathcal{I}_n}(H) + E_{\mathcal{I}_n}(H)KE_{\mathcal{I}_n}(H).$$

Par la Proposition 2.8, comme  $\mathcal{I}_n$  ne contient pas de valeur propre pour  $n$  assez grand,  $E_{\mathcal{I}_n}(H)$  tend fortement vers 0 et donc l'opérateur  $E_{\mathcal{I}_n}(H)KE_{\mathcal{I}_n}(H)$  tend en norme vers 0. Ainsi, on obtient :  $E_{\mathcal{I}_n}(H)[H, iA]E_{\mathcal{I}_n}(H) \geq c/2E_{\mathcal{I}_n}(H)$ , pour  $n$  assez grand.  $\square$

Il est maintenant raisonnable de prendre comme hypothèse une estimation de Mourre stricte et le Théorème 1.2 prend alors tout son sens.

### 3.3. Suites spéciales

Dans cette section, nous introduisons notre outil principal pour étudier le PAL. Nous procédons comme dans [J1] et nous utilisons la terminologie de [J1].

**Définition 3.2.** Une *suite spéciale*  $(f_n, z_n)_n$  pour  $H$  associée au triplet  $(\mathcal{I}, s, A)$ , comme dans (1.2), est une suite  $(f_n, z_n)_n \in (\mathcal{D}(H) \times \mathbb{C})^{\mathbb{N}}$  telle que, pour certain  $\lambda \in \mathcal{I}$  et  $\eta \geq 0$ ,  $\mathcal{I} \ni \operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \lambda$ ,  $0 \neq \operatorname{Im}(z_n) \rightarrow 0$ ,  $\|\langle A \rangle^{-s} f_n\| \rightarrow \eta$ ,  $(H - z_n)f_n \in \mathcal{D}(\langle A \rangle^s)$ , et  $\|\langle A \rangle^s (H - z_n)f_n\| \rightarrow 0$ . La limite  $\eta$  est appelée la *masse* de la suite spéciale.

Nous donnons le lien entre cette notion et celle du PAL.

**Proposition 3.3.** *Etant donné  $s \geq 0$  et un interval compact  $\mathcal{I}$ , le PAL pour  $H$  par rapport au triplet  $(\mathcal{I}, s, A)$  est faux si et seulement si il existe une suite spéciale  $(f_n, z_n)_n$  pour  $H$  associée au triplet  $(\mathcal{I}, s, A)$  avec une masse strictement positive.*

*Démonstration* (cf. [GJ]). Supposons que le PAL est faux. Il existe alors une suite  $(k_n)_n$  de réels positifs, tendant vers l'infini, une suite  $(g_n)_n$  d'éléments non-nuls de  $\mathcal{H}$  et une suite  $(z_n)_n$  de nombres complexes tels que  $\operatorname{Re}(z_n) \in \mathcal{I}$ ,  $0 \neq \operatorname{Im}(z_n) \rightarrow 0$ , et

$$\|\langle A \rangle^{-s} (H - z_n)^{-1} \langle A \rangle^{-s} g_n\| = k_n \|g_n\| = 1.$$

On pose  $f_n := (H - z_n)^{-1} \langle A \rangle^{-s} g_n$ ,  $f_n \in \mathcal{D}(H)$ ,  $(H - z_n)f_n \in \mathcal{D}(\langle A \rangle^s)$ . On obtient  $\|\langle A \rangle^{-s} f_n\| = 1$  et  $\|\langle A \rangle^s (H - z_n)f_n\| = 1/k_n \rightarrow 0$ . Quite à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que  $\operatorname{Re}(z_n) \rightarrow \lambda \in \mathcal{I}$ .

Supposons maintenant que le PAL est vrai. On considère  $(f_n, z_n)_n$ , une suite spéciale pour  $H$  associée au triplet  $(\mathcal{I}, s, A)$ . Par (1.2), il existe  $c > 0$  tel que  $\|\langle A \rangle^{-s} f_n\| \leq c \|\langle A \rangle^s (H - z_n)f_n\|$ . Ainsi,  $\eta = 0$ .  $\square$

Nous donnons maintenant un théorème du Viriel adapté aux suites spéciales. Cette proposition est le coeur de notre approche.

**Proposition 3.4.** *Soit  $(f_n, z_n)_n$  une suite spéciale pour un opérateur borné, auto-adjoint  $H_b$  associé au triplet  $(\mathcal{I}, s, A)$ , comme dans (1.2) avec  $s \geq 0$ . Pour toute fonction bornée borélienne  $\phi$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f_n, [H_b, \phi(A)] f_n \rangle = 0.$$

*Démonstration* (cf. [GJ]). Puisque  $[H_b, \phi(A)] = [H_b - z_n, \phi(A)]$ , on a

$$\begin{aligned} \langle f_n, [H_b, \phi(A)] f_n \rangle &= 2i \operatorname{Im}(z_n) \langle f_n, \phi(A) f_n \rangle \\ &\quad + \langle (H_b - z_n) f_n, \phi(A) f_n \rangle + \langle \phi(A)^* f_n, (H_b - z_n) f_n \rangle. \end{aligned}$$

Par définition, il existe  $C > 0$  tel que

$$\begin{aligned} |\langle (H_b - z_n) f_n, \phi(A) f_n \rangle| &\leq |\langle \langle A \rangle^s (H_b - z_n) f_n, \langle A \rangle^{-s} \phi(A) f_n \rangle| \\ &\leq C \|\phi(A)\| \cdot \|\langle A \rangle^s (H_b - z_n) f_n\| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

De la même façon,  $\lim \langle \phi(A)^* f_n, (H_b - z_n) f_n \rangle = 0$ . Puis, par définition,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(z_n) \cdot \|f_n\|^2 &= \operatorname{Im} \langle f_n, (H_b - z_n) f_n \rangle \\ &= \operatorname{Im} \langle \langle A \rangle^{-s} f_n, \langle A \rangle^s (H_b - z_n) f_n \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \end{aligned}$$

Enfin, puisque  $|\operatorname{Im}(z_n)\langle f_n, \phi(A)f_n \rangle| \leq |\operatorname{Im}(z_n)| \cdot \|f_n\|^2 \cdot \|\phi(A)\|$ , le résultat suit.  $\square$

## 4. Une nouvelle approche pour de la théorie de Mourre.

### 4.1. Localisation en énergie

Comme le PAL et l'estimation de Mourre donnent une information locale en énergie, il est naturel de localiser l'opérateur étudié en énergie. Cette approche a été en premier utilisée dans [S]. On rappelle alors :

**Proposition 4.1.** *Soit  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ . Si  $H \in C^k(A)$  pour un certain  $k \in \mathbb{N}$  alors  $\varphi(H) \in C^k(A)$ .*

Soit  $\tau \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  tel que  $\tau(x) = 1$  pour  $x \in \mathcal{I}$ . On définit  $H_\tau := H\tau(H)$ . Notons que  $H_\tau$  est aussi régulier que  $H$  par rapport à  $A$ . Nous donnons maintenant une estimation de Mourre *réduite*.

**Lemme 4.2.** *Soit  $\mathcal{I}$  un intervalle ouvert et borné. Supposons que  $H \in C^1(A)$  et que l'estimation de Mourre (1.3) est valide sur  $\mathcal{I}$ . Alors,  $H_\tau \in C^1(A)$  et*

$$E_{\mathcal{I}}(H)[H_\tau, iA]E_{\mathcal{I}}(H) \geq cE_{\mathcal{I}}(H) + K. \quad (4.7)$$

*Démonstration* (cf. [GJ]). Par la Proposition 4.1,  $H_\tau \in C^1(A)$ . Pour  $f \in \mathcal{D}(AE_{\mathcal{I}}(H))$ ,

$$\begin{aligned} \langle HE_{\mathcal{I}}(H)f, iAE_{\mathcal{I}}(H)f \rangle - \langle iAE_{\mathcal{I}}(H)f, HE_{\mathcal{I}}(H)f \rangle &\geq \\ c\|E_{\mathcal{I}}(H)f\|^2 + \langle f, Kf \rangle. \end{aligned}$$

Maintenant, on utilise le fait que  $HE_{\mathcal{I}}(H) = H\tau(H)E_{\mathcal{I}}(H)$ . Finalement,  $\mathcal{D}(AE_{\mathcal{I}}(H))$  est dense dans  $\mathcal{H}$  parce que  $E_{\mathcal{I}}(H)A$  est un opérateur fermé à domaine dense.  $\square$

*Remarque 4.3.* En général, il n'est pas raisonnable d'espérer un "vraie" estimation de Mourre pour  $H_\tau$  de la forme :

$$\varphi(H_\tau)[H_\tau, iA]\varphi(H_\tau) \geq c\varphi^2(H_\tau) + K,$$

pour une certaine fonction  $\varphi$ . En effet, puisque  $0 \in \operatorname{supp}(E_{\mathcal{I}})$ , il n'existe pas de fonctions  $\varphi$  telle que  $\varphi(t\tau(t)) = E_{\mathcal{I}}(t)$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

Le résultat suivant est le cœur de la preuve, nous en donnons une esquisse dans la prochaine section. Nous renvoyons à [GJ] pour la démonstration complète.

**Théorème 4.4.** *Soient  $s > 1/2$  et  $\mathcal{I}$  un intervalle ouvert. Supposons que  $\varphi(H) \in C^2(A)$ , pour tout  $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  à support dans un voisinage compact  $\mathcal{V}$  de  $\mathcal{I}$ . On suppose aussi l'estimation de Mourre réduite (4.7) au dessus de  $\mathcal{I}$  avec  $\tau$  à support dans  $\mathcal{V}$ . Alors pour tout  $\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}$  fermé, nous avons un PAL pour  $H_\tau$  associé au triplet  $(\mathcal{I}', s, A)$ .*

Pour obtenir le Théorème 1.2, il suffit de déduire un PAL pour  $H$ .

**Lemme 4.5.** *Sous les hypothèses du Théorème 4.4, nous avons, pour tout  $\mathcal{I}' \subset \mathcal{I}$  fermé, un PAL pour  $H$  associé au triplet  $(\mathcal{I}', s, A)$ .*



*Démonstration* (cf. [GJ]). Il suffit de supposer que  $s < 1$ . Soit  $(f_n, z_n)_n$  une suite spéciale pour  $H$  associée au triplet  $(\mathcal{I}', s, A)$  de masse  $\eta$ . Soit  $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  à support dans  $\mathcal{I}$  tel que  $\theta(t) = 1$  pour  $t \in \mathcal{I}'$ . Soit  $\tilde{\theta} = 1 - \theta$ .

On a  $t \mapsto \tilde{\theta}(t)/(t - z_n)$  uniformément borné en  $n$  et  $\|\tilde{\theta}(H)f_n\| \leq \|\tilde{\theta}(H)(H - z_n)^{-1}\langle A \rangle^{-s}\| \cdot \|\langle A \rangle^s(H - z_n)f_n\|$  donc  $\|\tilde{\theta}(H)f_n\|$  tend vers 0. Puisque  $s \geq 0$ ,  $\|\langle A \rangle^{-s}\tilde{\theta}(H)f_n\| \rightarrow 0$  et donc  $\|\langle A \rangle^{-s}\theta(H)f_n\| \rightarrow \eta$ . Enfin comme  $\theta(H) \in \mathcal{C}^1(A)$  et  $s < 1$ , on peut montrer que  $\|\langle A \rangle^s\theta(H)\langle A \rangle^{-s}\|$  est borné. Finalement, par construction de  $\theta$ ,

$$\|\langle A \rangle^s(H_\tau - z_n)\theta(H)f_n\| \leq \|\langle A \rangle^s\theta(H)\langle A \rangle^{-s}\| \cdot \|\langle A \rangle^s(H - z_n)f_n\|$$

tend vers 0. Donc  $(\theta(H)f_n, z_n)_n$  est une suite spéciale pour  $H_\tau$  de masse  $\eta$ . Par Théorème 4.4 et par la Proposition 3.3 appliquée à  $H_\tau$ ,  $\eta$  est nul et donc par la Proposition 3.3 appliquée à  $H$ , le PAL pour  $H$  associé au triplet  $(\mathcal{I}', s, A)$  est vrai.  $\square$

## 4.2. Esquisse de preuve du Théorème 4.4

Il suffit de montrer ce résultat pour  $s$  proche de  $1/2$ . Soit  $(f_n, z_n)_n$  une suite spéciale de masse  $\eta$  pour  $H_\tau$  associée au triplet  $(\mathcal{I}, s, A)$ . D'après la Proposition 3.3 il suffit de montrer que  $\eta$  est nul pour obtenir le PAL.

Soit  $\chi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R})$  tel que

$$\chi = 1 \text{ on } [-1, 1] \text{ and } \chi = 0 \text{ on } \mathbb{R} \setminus [-2, 2]. \quad (4.8)$$

Pour  $R > 1$ , on pose  $\chi_R(x) = \chi(x/R)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}$  et  $\tilde{\chi}_R = 1 - \chi_R$ .

On sépare le problème en localisant à petite et grande énergie pour  $A$ . On montre que

$$\begin{aligned} \eta &= \lim_{n \rightarrow \infty} \|\langle A \rangle^{-s}f_n\| \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (\|\tilde{\chi}_R(A)\langle A \rangle^{-s}f_n\| + \|\chi_R(A)\langle A \rangle^{-s}f_n\|) \\ &\leq \limsup_{n \rightarrow \infty} (\|\tilde{\chi}_R(A)\langle A \rangle^{-s}f_n\| + \|\chi_R(A)f_n\|) = O(R^\alpha). \end{aligned}$$

pour un certain  $\alpha < 0$ . Il suffit alors de faire tendre  $R$  vers l'infini pour obtenir que  $\eta = 0$ .

Nous donnons maintenant un heuristique de la preuve de  $\limsup_{n \rightarrow \infty} (\|\tilde{\chi}_R(A)\langle A \rangle^{-s}f_n\|) = O(R^\alpha)$ . Il est basé sur l'utilisation de notre Viriel. Cette preuve rappelle aussi les approches utilisées dans les Propositions 2.7 et 2.8.

On part donc de l'estimation de Mourre réduite (4.7). On l'applique à  $\langle A \rangle^{-s}\chi_R(A)f_n$ . Par des estimations de commutateurs, basées sur le formule d'Helffer-Sjöstrand (cf. [HeS]), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle \langle A \rangle^{-s}\chi_R(A)f_n, [H_\tau, iA]\langle A \rangle^{-s}\chi_R(A)f_n \rangle &\geq c\|\langle A \rangle^{-s}\chi_R(A)f_n\|^2 + R_1, \\ \langle \chi_R(A)f_n, [H_\tau, iA\langle A \rangle^{-2s}]\chi_R(A)f_n \rangle &\geq c\|\langle A \rangle^{-s}\chi_R(A)f_n\|^2 + R_2, \\ \langle f_n, [H_\tau, i\phi_R(A)]f_n \rangle &\geq c\|\langle A \rangle^{-s}\chi_R(A)f_n\|^2 + R_3, \end{aligned}$$

où  $R_1, R_2$  et  $R_3$  sont des restes en  $n$  et  $R$  et  $\phi_R := t \mapsto t\langle t \rangle^{-2s}\chi_R(t)$ .

Comme  $s > 1/2$ ,  $\phi_r$  est bornée et on peut alors utiliser la Proposition 3.4. On obtient alors que  $\|\langle A \rangle^{-s}\chi_R(A)f_n\|^2$  est du même ordre que  $R_3$ . La difficulté de la preuve vient du fait qu'il n'est pas évident que  $R_3$  soit mieux qu'un  $O(1)$ . Ce

problème est relié au fait que les troncatures en énergie en  $A$  soient rentrées dans le commutateurs.

Le reste  $R_2$  est cependant très contrôlable et nous donnons alors une fonction bornée  $\psi_R$  telle que :

$$\langle f_n, [H_\tau, i\psi_R(A)]f_n \rangle \geq \langle \chi_R(A)f_n, [H_\tau, iA\langle A \rangle^{-2s}]\chi_R(A)f_n \rangle + R'_2,$$

avec  $R'_2$  étant un reste contrôlable. Il suffit alors d'utiliser le Viriel pour montrer la borne requise.

Une fois cette borne obtenue. On repart de l'estimation de Mourre réduite et on l'applique à  $\chi_R(A)f_n$ . Nous utilisons alors un argument de Viriel pour estimer la taille de  $\limsup_{n \rightarrow \infty} \|\chi_R(A)f_n\|$ .

### 4.3. Remarques et perspectives

Tout d'abord, il est intéressant de comparer les deux théorèmes du Viriel. On voit alors que dans notre approche, le Lemme 3.4 utilisé avec des suites spéciales joue un rôle similaire à celui de la Proposition 2.6 utilisé avec des fonctions propres. Cela nous donne alors une nouvelle interprétation de la preuve du PAL obtenu par l'estimation de Mourre. Cela donne aussi une preuve alternative à la preuve classique obtenue par inégalité différentielle.

Ensuite, il est à noter que le Théorème 4.4 est sensiblement plus fort que le Théorème 1.2 car il permet de faire marcher la théorie seulement sous un hypothèse de régularité locale, voir aussi [S]. Il est à noter que les Propositions 2.7, 2.8 et 3.1 sont vraies aussi sous des hypothèses de régularité locale, voir [S].

D'un point de vu de l'optimalité, notre méthode est jeune et elle n'atteint pas encore le niveau de sophistication actuelle. Par exemple, la classe optimale de  $H$  par rapport à  $A$  est connue et est bien meilleure que celle de  $\mathcal{C}^2(A)$ , cf. [ABG]. En plus, beaucoup de conséquences de la théorie ne sont pas encore redémontrées par cette méthode. Par exemple, l'existence de la valeur au bord de la résolvante n'est encore pas claire par cette approche.

Dans la section 3.1, il est mentionné que le PAL implique l'absence de valeurs propres. Comme pour pouvoir montrer un PAL, nous nous situons dans une région où il n'y a pas de valeurs propres une question se pose. Soit  $P$  le projecteur associé au spectre ponctuel de  $H$ . Est-il possible de montrer un PAL dans  $(P\mathcal{H})^\perp$ , c'est à dire à un niveau d'énergie partagé par une valeur propre? Pour y arriver, il faut changer la notion de PAL. Pour  $s \geq 0$ , on dit le *PAL réduit* pour  $H$ , associé au triplet  $(\mathcal{I}, s, A)$ , est vrai si

$$\sup_{\operatorname{Re} z \in \mathcal{I}, \operatorname{Im} z \neq 0} \|\langle A \rangle^{-s} (H - z)^{-1} P^\perp \langle A \rangle^{-s}\| < \infty. \quad (4.9)$$

Nous montrons alors que

**Théorème 4.6.** *Soit  $H \in \mathcal{C}^2(A)$ ,  $\mathcal{I}$  un intervalle ouvert borné et soit  $s > 1/2$ . Supposons que l'estimation de Mourre (1.1) soit vraie sur  $\mathcal{I}$ . Supposons aussi que l'image de  $PE_{\mathcal{I}}$  soit incluse dans le domaine de  $A^2$ . Alors, pour tout intervalle fermé  $\mathcal{I}'$  inclus dans l'intérieur de  $\mathcal{I}$ , le PAL réduit pour  $H$  (4.9), associé au triplet  $(\mathcal{I}', s, A)$  est vrai.*

Nous étendons alors un résultat apparaissant dans [CGH]. Dans [GJ], nous donnons deux preuves de ce résultat, une basée sur une technique de Feshbach et une basée sur l'utilisation des suites spéciales.

## 5. Exemple pratique

Dans un souci de complétude, nous traitons l'exemple 0 de la théorie. Soit  $\mathcal{H} = L^2(\mathbb{R})$ ,  $P = -i\partial_x$  et  $Q$  l'opérateur de multiplication par  $x$ . Nous souhaitons étudier  $H = P^2 + V$ , où  $V$  est un opérateur de multiplication par une fonction  $V$  lisse bornée. Le domaine de  $H$  est l'espace de Sobolev  $\mathcal{H}^2$ .

Soit  $A = (PQ + QP)/2$ , le générateur des dilatations. Nous avons, en effet,  $(e^{itA}f)(x) = e^{t/2}f(e^t x)$ , pour tout  $t, x \in \mathbb{R}$ . On a directement que  $e^{itA}\mathcal{D}(H) \subset \mathcal{D}(H)$ , pour tout  $t \in \mathbb{R}$ .

On remarque que  $[P^2, iA] = P^2$ , au sens de formes. Le Lemme 2.4 nous dit alors que  $P^2 \in \mathcal{C}^\infty(A)$ . En plus, comme le spectre de  $P^2$  est  $[0, \infty)$  alors nous avons pour tout  $\mathcal{I}$  fermé inclus dans  $(0, \infty)$  et  $c = \inf \mathcal{I} > 0$  :

$$E_{\mathcal{I}}(P^2)[P^2, iA]E_{\mathcal{I}}(P^2) \geq cE_{\mathcal{I}}(P^2). \quad (5.10)$$

On suppose maintenant que  $V$  tend vers 0 à l'infini, par Rellich-Kondrakov, cela implique que  $V(P^2 + i)^{-1}$  est un opérateur compact. En écrivant la différence des résolvantes de  $H$  et  $P^2$  et en utilisant Stone-Wierstass, nous avons alors que

$$\theta(H) - \theta(P^2) \text{ est un opérateur compact pour tout } \theta \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R}). \quad (5.11)$$

Par le critère de Weyl, le spectre essentiel de  $H$  est alors  $[0, \infty)$ . Supposons maintenant que  $V' = [V, iA]$  tend aussi vers 0 à l'infini. Cela implique que  $H \in \mathcal{C}^1(A)$  et aussi que  $V'\theta(P^2)$  est compact.

Maintenant, par un argument d'approximation, on remarque que (1.1) est vrai si et seulement si

$$\theta(H)[H, iA]\theta(H) \geq c\theta^2(H) + K, \quad (5.12)$$

est vrai pour tout  $\theta \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathcal{I})$ . Ensuite par, (5.10), (5.11) et le fait que  $V'\theta(P^2)$  soit compact, nous avons (1.1) avec le même  $\mathcal{I}$  et  $c$ . Nous pouvons alors utiliser les Propositions 2.7 et 2.8.

Pour utiliser maintenant le Théorème 1.2, il suffit de supposer que  $V''$  est borné pour valider l'hypothèse  $H \in \mathcal{C}^2(A)$ . Ceci n'est bien sûr un résultat taillé dans la roche. Par exemple pour la classe  $\mathcal{C}^2(A)$ , on peut montrer qu'il suffit que  $V$  soit continue, borné et  $V = O(x^{-2})$  à l'infini. Concernant des résultats plus fins obtenus avec la classe  $\mathcal{C}^2(A)$ , il suffit de supposer que  $V = O(x^{-1-\varepsilon})$ , où  $\varepsilon > 0$ , pour pouvoir atteindre un PAL grâce à cette théorie.

## Références

- [ABG] W.O. Amrein, A. Boutet de Monvel and V. Georgescu : *C<sub>0</sub>-groups, commutator methods and spectral theory of N-body hamiltonians.*, Birkhäuser 1996.
- [BCHM] J-F. Bony, R. Carles, D. Haeflner, L. Michel : *Scattering theory for the Schrödinger equation with repulsive potential.* J. Math. Pures Appl. 84, no. 5, 509-579, 2005.

- [B] N. Burq : *Semiclassical estimates for the resolvent in non trapping geometries*. Int. Math. Res. Notices 2002, no 5, 221–241.
- [CJ] F. Castella, Th. Jecko : *Besov estimates in the high-frequency Helmholtz equation, for a non-trapping and  $C^2$  potential*. To appear in J. Diff. Eq.
- [CGH] L. Cattaneo, G. M. Graf and W. Hunziker : *A general resonance theory based on Mourre’s inequality*, math-ph/0507063.
- [DG] J. Dereziński and C. Gérard : *Scattering theory of classical and quantum  $N$ -particle systems*. Springer-Verlag 1997.
- [DJ] J. Dereziński and V. Jakšić : *Spectral theory of Pauli-Fierz operators*. J. Funct. Anal. 180, no 2, pp. 243-327, 2001.
- [GGé] V. Georgescu and C. Gérard : *On the Virial Theorem in Quantum Mechanics*, Commun. Math. Phys. **208**, 275–281, (1999).
- [GGM1] V. Georgescu, C. Gérard, and J.S. Møller : *Commutators,  $C_0$ -semigroups and resolvent estimates*, J. Funct. Anal. **216**, no 2, pp. 303-361, 2004.
- [GGM2] V. Georgescu, C. Gérard, and J.S. Møller : *Spectral theory of massless Pauli-Fierz models*, Comm. Math. Phys. **249**, no 1, pp. 29-78, 2004.
- [GGo] V. Georgescu, S. Golénia : *Isometries, Fock spaces and spectral analysis of Schrödinger operators on trees.*, Journal of Functional Analysis 227 (2005), 389-429.
- [GJ] S. Golénia, T. Jecko : *A new look at Mourre’s commutator theorem.*, preprint mp\_arc 06-138, submitted to publication.
- [HeS] B. Helffer and J. Sjöstrand : *Opérateurs de Schrödinger avec champs magnétiques faibles et constants*. Exposé No. XII, Séminaire EDP, février 1989, Ecole Polytechnique.
- [HuS] W. Hunziker and I.M. Sigal : *The quantum  $N$ -body problem*, J. Math. Phys. **41** (6), 3448–3510, 2000.
- [J1] Th. Jecko : *From classical to semiclassical non-trapping behaviour*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, **338**, p. 545–548, 2004.
- [J2] Th. Jecko : *Non-trapping condition for semiclassical Schrödinger operators with matrix-valued potentials*. Math. Phys. Electronic Journal, No. 2, vol. 11, 2005.
- [M] E. Mourre : *Absence of singular continuous spectrum for certain self-adjoint operators*. Commun. in Math. Phys. **78**, 391–408, 1981.
- [RS4] M. Reed, B. Simon : *Methods of Modern Mathematical Physics, Tome IV : Analysis of operators*. Academic Press.
- [S] J. Sahbani : *The conjugate operator method for locally regular Hamiltonians*. J. Oper. Theory 38, No. 2, 297–322 (1997).

DEPARTEMENT OF MATHEMATICAL METHODS IN PHYSICS  
WARSAW UNIVERSITY  
HOŻA 74  
00-682 WARSZAWA, POLAND  
Sylvain.Golenia@fuw.edu.pl